Riccatische Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f_0(x)y^2 + f_1(x)y + f_2(x)$$

mit gegebenen Funktionen $f_0, f_1, f_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f_0(x) \neq 0$ heißt eine *Riccatische Differentialgleichung*.

a) Es seien f_0 zweimal stetig differenzierbar, f_1 einmal stetig differenzierbar und f_2 stetig. Bestimmen Sie Funktionen $g = g(x)$ und $f = f(x)$, so dass die Transformation $z = f_0 y + g$ die Riccatische Differentialgleichung in die *Normalform* $z' = z^2 - f(x)$ überführt.

b) Berechnen Sie die Normalform der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = y^2 - (2x+1)y + (1 + x + x^2).$$

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprüglichen Riccatischen Differentialgleichung aus b) an.

d) Bestimmen Sie die die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x\,(2x-1)\,y' + y^2 - (4x+1)\,y + 4x = 0.$$

Beachten Sie, dass $y \equiv 1$ eine Lösung ist!